Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2021, Extraordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de $25000\,\text{km h}^{-1}$ y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

a) **Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.**
b) **Si la densidad del planeta es de $16150\,\text{kg m}^{-3}$, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.**

La velocidad orbital de la nave es constante y la órbita es circular, por lo que se cumple:

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

donde v es la velocidad orbital de la nave, r es el radio de la órbita y T es el periodo orbital (tiempo que tarda en completar una vuelta). Despejamos r:

$$r = \frac{vT}{2\pi}.$$

Convertimos las unidades:

$$v = 25\,000\,\text{km/h} = 25\,000\,\text{km/h} \cdot \frac{1\,000\,\text{m}}{1\,\text{km}} = 25\,000\,000\,\text{m/h},$$
$$T = 5\,\text{horas}.$$

Calculamos r:

$$r = \frac{25\,000\,000\,\text{m/h} \cdot 5\,\text{h}}{2\pi} = \frac{125\,000\,000\,\text{m}}{2\pi} = 19\,894\,367\,\text{m} = 1{,}989 \cdot 10^7\,\text{m}.$$

Para una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria es proporcionada por la fuerza de gravedad:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

donde m es la masa de la nave (que se cancela) y G es la constante de gravitación universal. Despejamos M:

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{v^2 r}{G}.$$

Convertimos la velocidad a *metros por segundo*:

$$v = 25\,000\,000\,\text{m/h} \cdot \frac{1\,\text{h}}{3\,600\,\text{s}} = 6\,944{,}44\,\text{m/s}.$$

Ahora, calculamos M:

$$M = \frac{(6\,944{,}44\,\text{m/s})^2 \cdot 1{,}989 \cdot 10^7\,\text{m}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}} = 1{,}439 \cdot 10^{24}\,\text{kg}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita es $1{,}989 \cdot 10^7$ m y la masa del planeta es $1{,}439 \cdot 10^{24}$ kg.

b) Si la densidad del planeta es de 16150 kg m^{-3}, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

Primero calculamos el radio del planeta (R) usando la densidad (ρ). Suponiendo que el planeta es una esfera uniforme:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

Sustituimos los valores:

$$R = \left(\frac{3 \cdot 1{,}439 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{4\pi \cdot 16\,150\,\text{kg/m}^3}\right)^{1/3} = 5968,6 \cdot 10^3\,\text{m} = 5968,6\,\text{km}.$$

Seguidamente, hallamos la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta (g). La aceleración de la gravedad en la superficie es:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Sustituimos los valores:

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}439 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(5968,6 \cdot 10^3\,\text{m})^2} = 26,931\,\text{m/s}^2.$$

Por lo tanto, el radio del planeta es 5968,6 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 26,931 m/s^2.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Anacleto, el agente secreto, está grabando con un teléfono inteligente, a través de una pared, una conversación muy delicada del malvado Vázquez. La distancia entre ambos es de 5 m y, por efecto de la pared, al teléfono solo llega un 2% de la intensidad que llegaría si no hubiese pared. Se sabe que el nivel de intensidad sonora de una conversación a 1 metro es de 50 dB.

a) **Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.**
b) **Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **Calcule el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente.**

El nivel de intensidad sonora (β) se relaciona con la intensidad (I) mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

Dado que a 1 m, $\beta = 50$ dB, podemos despejar I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2} \cdot 10^{50/10} = 10^{-12} \cdot 10^5 = 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}.$$

A continuación, calculemos la intensidad sonora a 5 m sin considerar la pared. La intensidad sonora en una onda esférica disminuye con el cuadrado de la distancia (r):

$$I(r) = I_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2,$$

donde $I_1 = 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2}$ es la intensidad a $r_1 = 1$ m y $r = 5$ m es la nueva distancia. Sustituyendo:

$$I(5\,\mathrm{m}) = 10^{-7}\,\mathrm{W/m^2} \left(\frac{1}{5} \right)^2 = 10^{-7} \cdot \frac{1}{25} = 4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Considerando la atenuación por la pared (solo llega el 2% de la intensidad):

$$I_{\text{pared}} = 0{,}02 \cdot I(5\,\mathrm{m}) = 0{,}02 \cdot 4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2} = 8 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Finalmente, hallamos el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono (β_{tel}):

$$\beta_{\text{tel}} = 10 \log \left(\frac{I_{\text{pared}}}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{8 \cdot 10^{-11}}{10^{-12}} \right) = 10 \log(80) = 10 \cdot 1{,}903 = 19{,}03\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora que llega al teléfono inteligente es de aproximadamente 19,03 dB.

b) **Si el teléfono es capaz de grabar conversaciones a 100 metros de distancia, ¿cuál es el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir?**

Empezamos calculando la intensidad sonora a 100 m sin considerar la pared. Nuevamente, aplicamos la ley de inversa del cuadrado:

$$I(100\,\mathrm{m}) = I_1 \left(\frac{1}{100} \right)^2 = 10^{-7} \cdot \frac{1}{10^4} = 10^{-11}\,\mathrm{W/m^2}.$$

El nivel de intensidad sonora que llega al teléfono a $100\,\mathrm{m}$ (β_{100m}) es:

$$\beta_{100m} = 10 \log \left(\frac{I(100\,\mathrm{m})}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{10^{-11}}{10^{-12}} \right) = 10\,\mathrm{dB}.$$

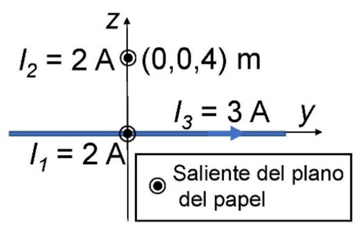
Por lo tanto, el nivel más bajo de intensidad sonora que es capaz de medir el teléfono es de 10 dB.

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Se tienen tres hilos indefinidos de corriente. Los hilos de intensidades $I_1 = 2$ A e $I_2 = 2$ A son paralelos al eje x y pasan por los puntos $(0, 0, 0)$ y $(0, 0, 4)$ m, respectivamente. El tercer hilo, con una intensidad $I_3 = 3$ A pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al eje y. En todos los casos la corriente va en el sentido positivo de los ejes. Calcule:

a) **El campo magnético total creado por los tres hilos en el punto $(0, 0, 2)$ m.**
b) **La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo de intensidad I_1 sobre el hilo de intensidad I_2. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?**

Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}.



Solución:

a) **El campo magnético total creado por los tres hilos en el punto $(0, 0, 2)$ m.**

La expresión del campo magnético creado por un hilo de corriente infinito es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{\phi},$$

donde:
- μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío,
- I es la intensidad de la corriente,
- r es la distancia desde el hilo al punto de interés,
- $\vec{u}_\phi$ es el vector unitario en la dirección azimutal, determinado por la regla de la mano derecha.

Analizamos cada hilo por separado en el punto $(0, 0, 2)$ m:
<u>Hilo 1:</u> $I_1 = 2$ A, paralelo al eje x, ubicado en $(0, 0, 0)$.

$$r_1 = 2\,\text{m}, \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\,\vec{u}_\phi^{(1)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 2}\,(-\vec{j}) = -2 \cdot 10^{-7}\,\vec{j}\,\text{T},$$

ya que la dirección del campo es hacia el eje $-y$.

<u>Hilo 2:</u> $I_2 = 2$ A, paralelo al eje x, ubicado en $(0, 0, 4)$ m.

$$r_2 = 2\,\text{m}, \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\,\vec{u}_\phi^{(2)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 2}\,\vec{j} = 2 \cdot 10^{-7}\,\vec{j}\,\text{T},$$

pues la dirección del campo es hacia el eje $+y$.

<u>Hilo 3:</u> $I_3 = 3$ A, paralelo al eje y, ubicado en $(0, 0, 0)$.

$$r_3 = 2\,\text{m}, \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3}\,\vec{u}_\phi^{(3)} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2\pi \cdot 2}\,\vec{i} = 3 \cdot 10^{-7}\,\vec{i}\,\text{T},$$

dado que la dirección del campo es hacia el eje $+x$.

El campo magnético total en el punto $(0, 0, 2)$ m es

$$\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = (-2 \cdot 10^{-7}\,\vec{j}) + (2 \cdot 10^{-7}\,\vec{j}) + (3 \cdot 10^{-7}\,\vec{i}) = 3 \cdot 10^{-7}\,\vec{i}\,\text{T}.$$

Por lo tanto, el campo magnético total en el punto $(0, 0, 2)$ m es $\vec{B}_{\text{total}} = 3 \cdot 10^{-7}\,\vec{i}\,\text{T}$.

b) **La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo de intensidad I_1 sobre el hilo de intensidad I_2. ¿La fuerza es atractiva o repulsiva?**

La fuerza magnética por unidad de longitud entre dos hilos paralelos se calcula mediante:

$$\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\vec{n},$$

donde:
- μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío,
- I_1 e I_2 son las intensidades de las corrientes,
- d es la distancia entre los hilos,
- $\vec{n}$ es el vector unitario que indica la dirección de la fuerza.

Para los hilos I_1 e I_2, ambos paralelos al eje x y separados por una distancia $d = 4$ m:

$$\frac{F}{L} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2}{2\pi \cdot 4} = 2 \cdot 10^{-7}\,\text{N/m}.$$

Dado que las corrientes en ambos hilos son en la misma dirección (positiva del eje x), la fuerza es atractiva, es decir, los hilos se atraen entre sí. Además, se tiene que $\vec{n} = -\vec{k}$ usando la regla de la mano derecha.

Por lo tanto, la fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo I_1 sobre el hilo I_2 es $-2 \cdot 10^{-7}, \vec{k}$ N/m y es atractiva.

Pregunta 4. Opción A. Óptica

Sea un sistema óptico formado por dos lentes convergentes, una lente A de distancia focal f'_A y otra B, situada 80 cm a la derecha de A, de distancia focal $f'_B = 30$ cm. Un objeto de 5 cm de altura está situado 15 cm a la izquierda de la lente A.

a) **Si la imagen del objeto formada por el sistema de lentes aparece 75 cm a la derecha de la lente B, ¿cuánto vale la distancia focal de la lente A y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes?**

b) **¿Dónde hay que situar el objeto a la izquierda de la lente A, para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito?**

Solución:

a) **Si la imagen del objeto formada por el sistema de lentes aparece 75 cm a la derecha de la lente B, ¿cuánto vale la distancia focal de la lente A y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes?**

Sabemos que:

$$\frac{1}{f'_B} = \frac{1}{s'_B} - \frac{1}{s_B},$$

donde:
- $f'_B = 30$ cm es la distancia focal de la lente B,
- $s'_B = +75$ cm es la distancia de la imagen formada por el sistema de lentes desde la lente B (positivo a la derecha),
- s_B es la distancia del objeto para la lente B (que es la imagen formada por la lente A).

Despejamos s_B:

$$\frac{1}{s_B} = \frac{1}{s'_B} - \frac{1}{f'_B} = \frac{1}{75} - \frac{1}{30} = \frac{2-5}{150} = \frac{-3}{150} = -\frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad s_B = -50\,\text{cm}.$$

Nótese que el signo negativo indica que el objeto para la lente B es virtual y está a 50 cm a la izquierda de la lente B. A continuación, determinamos la distancia de la imagen formada por la lente A (s'_A). Dado que la distancia entre las lentes A y B es 80 cm, y el objeto para la lente B está a -50 cm desde la lente B, entonces:

$$s'_A = \text{Distancia entre las lentes} - \text{Distancia del objeto para B} = 80\,\text{cm} - 50\,\text{cm} = 30\,\text{cm}.$$

Utilizamos la ecuación de las lentes delgadas para la lente A:

$$\frac{1}{f'_A} = \frac{1}{s'_A} - \frac{1}{s_A}.$$

donde:
- $s_A = -15$ cm es la distancia del objeto a la lente A (negativo a la izquierda),
- $s'_A = +30$ cm es la distancia de la imagen formada por la lente A (positivo a la derecha).

Sustituyendo los valores:

$$\frac{1}{f'_A} = \frac{1}{30} - \frac{1}{-15} \quad \Rightarrow \quad f'_A = 10\,\text{cm}.$$

La amplificación total del sistema de lentes es el producto de las amplificaciones individuales:

$$m_{\text{total}} = m_A \cdot m_B,$$

donde:

$$m_A = \frac{s'_A}{s_A} = \frac{30}{-15} = -2,$$

$$m_B = \frac{s'_B}{s_B} = \frac{75}{-50} = -1{,}5.$$

Entonces,

$$m_{\text{total}} = -2 \cdot (-1,5) = 3.$$

El tamaño de la imagen (y') es:

$$y' = m_{\text{total}} \cdot y = 3 \cdot 5\,\text{cm} = 15\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, la distancia focal de la lente A es 10 cm y el tamaño de la imagen formada por el sistema de lentes es de 15 cm.

b) ¿Dónde hay que situar el objeto a la izquierda de la lente A, para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito?

Para que la imagen del sistema de lentes se forme en el infinito, la imagen intermedia formada por la lente A debe situarse en el foco de la lente B. Es decir:

$$s'_B = f'_B = 30\,\text{cm}.$$

La distancia entre las lentes es $d = 80\,\text{cm}$, por lo que la posición de la imagen intermedia respecto a la lente A debe ser:

$$s'_A = d - f'_B = 80\,\text{cm} - 30\,\text{cm} = 50\,\text{cm}.$$

Dado que el signo positivo indica que la imagen está a la derecha de la lente A, aplicamos la ecuación de las lentes delgadas para la lente A:

$$\frac{1}{f'_A} = \frac{1}{s'_A} - \frac{1}{s_A}.$$

Ya conocemos $f'_A = 10\,\text{cm}$ y $s'_A = 50\,\text{cm}$, despejamos s_A:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{50} - \frac{1}{s_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_A} = \frac{1}{50} - \frac{1}{10} = \frac{1-5}{50} = -\frac{4}{50} = -\frac{2}{25} \quad \Rightarrow \quad s_A = -\frac{25}{2} = -12{,}5\,\text{cm},$$

donde el signo negativo indica que el objeto debe situarse a 12,5 cm a la izquierda de la lente A.

Por lo tanto, el objeto debe situarse a 12,5 cm a la izquierda de la lente A para que el sistema de lentes forme la imagen en el infinito.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

En un experimento realizado en un acelerador de partículas se han originado un electrón relativista de velocidad $0,75c$, siendo c la velocidad de la luz, y un fotón de $15\,\mathrm{MeV}$ de energía.

a) **Calcule la masa relativista y la energía cinética del electrón.**
b) **Determine la longitud de onda del fotón y la longitud de de Broglie del electrón.**

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; Masa del electrón en reposo, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\ s}$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\ s^{-1}}$.

Solución:

a) **Calcule la masa relativista y la energía cinética del electrón.**

La masa relativista (m) de una partícula se calcula mediante la fórmula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

donde:
- $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ es la masa en reposo del electrón,
- $v = 0{,}75c$ es la velocidad del electrón,
- $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad de la luz.

Sustituyendo los valores:

$$m = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{\sqrt{1 - (0{,}75)^2}} = 1{,}38 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}.$$

La energía cinética (E_c) de una partícula relativista se calcula como:

$$E_c = (\gamma - 1) m_0 c^2,$$

donde γ es el factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}75^2}} = 1{,}5119.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_c = (1{,}5119 - 1) \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2 = 4{,}19 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}.$$

Por lo tanto, la masa relativista del electrón es $1{,}38 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$ y su energía cinética es $4{,}19 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$.

b) **Determine la longitud de onda del fotón y la longitud de de Broglie del electrón.**

La longitud de onda de un fotón (λ_f) se relaciona con su energía (E) mediante la fórmula:

$$\lambda_f = \frac{hc}{E},$$

donde:
- $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\ s}$ es la constante de Planck,
- $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad de la luz,
- $E = 15\,\mathrm{MeV} = 15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$ es la energía del fotón.

Sustituyendo los valores:

$$\lambda_f = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}4 \cdot 10^{-12}} = 8{,}29 \cdot 10^{-14}\,\text{m}.$$

La longitud de onda de de Broglie (λ_c) de una partícula se calcula como:

$$\lambda_c = \frac{h}{p},$$

donde p es el momento lineal de la partícula. Para una partícula relativista:

$$p = \gamma m_0 v.$$

Tenemos que

$$\gamma = 1{,}5119, \quad m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}, \quad v = 0{,}75c = 0{,}75 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}25 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

Calculamos p:

$$p = 1{,}5119 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2{,}25 \cdot 10^8 = 3{,}08 \cdot 10^{-22}\,\text{kg m/s}.$$

Ahora, hallamos λ_c:

$$\lambda_c = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{3{,}08 \cdot 10^{-22}} = 2{,}15 \cdot 10^{-12}\,\text{m}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda del fotón es $8{,}29 \cdot 10^{-14}$ m y la longitud de de Broglie del electrón es $2{,}15 \cdot 10^{-12}$ m.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

Una partícula de masa m se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia (x, y). La componente x del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto $(2, 2)$ m es $-1,18 \cdot 10^{-11}$ N kg^{-1}.

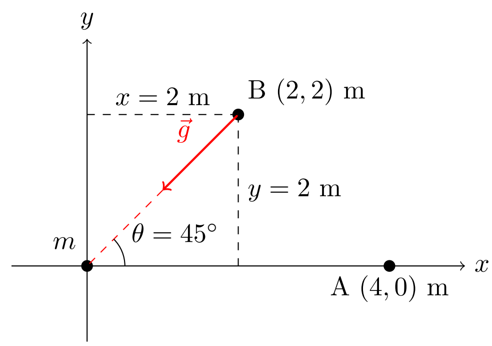
a) **Calcule el valor de la masa m.**
b) **¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa $M = 5$ kg desde el punto $(4, 0)$ m al punto $(2, 2)$ m?**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **Calcule el valor de la masa m.**

En primer lugar, representamos la información dada en el enunciado:



La expresión del campo gravitatorio ($\vec{g}$) creado por una masa puntual m es:

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r,$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- r es la distancia desde la masa al punto donde se calcula el campo,
- $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de r.

En coordenadas cartesianas, el vector $\vec{u}_r$ desde el origen al punto (x, y) es:

$$\vec{u}_r = x\vec{i} + y\vec{j},$$

y su magnitud es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La componente x del campo gravitatorio viene dada por

$$g_x = -\frac{Gm}{r^2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{g_x r^2}{Gcos\theta} = -\frac{(-1{,}18 \cdot 10^{-11})(2^2 + 2^2)}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \cos(45°)} = 2,0015\,\text{kg}.$$

Por lo tanto, la masa m es $2,0015$ kg.

b) **¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa $M = 5$ kg desde el punto $(4, 0)$ m al punto $(2, 2)$ m?**

El potencial gravitatorio (V) creado por una masa m en un punto a una distancia r es:

$$V = -\frac{Gm}{r}.$$

Punto A: $(4, 0)$ m

$$r_A = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4\,\text{m},$$

$$V_A = -\frac{Gm}{4}.$$

Punto B: $(2, 2)$ m

$$r_B = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\,\text{m},$$

$$V_B = -\frac{Gm}{2\sqrt{2}}.$$

El trabajo realizado por el campo gravitatorio al mover una masa M desde el punto A al punto B es:

$$W = -M(V_B - V_A).$$

Sustituyendo los valores:

$$W = M\left(-\frac{Gm}{2\sqrt{2}} - \left(-\frac{Gm}{4}\right)\right) = M\left(\frac{Gm}{4} - \frac{Gm}{2\sqrt{2}}\right).$$

Sabemos que $m \approx 2{,}0\,\text{kg}$ (del apartado anterior), $M = 5\,\text{kg}$ y $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2}$. Entonces,

$$W = -5 \cdot \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0}{4} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0}{2 \cdot 1{,}4142}\right) = 6{,}91 \cdot 10^{-11}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo que realiza el campo gravitatorio es aproximadamente $6{,}91 \cdot 10^{-11}$ J.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje x. La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje x. La expresión matemática de la onda en los instantes $t = 0\,\mathrm{s}$ y $t = 2\,\mathrm{s}$ es $y(x,0) = 0,1\cos(\pi - 4\pi x)\,\mathrm{m}$ e $y(x,2) = 0,1\cos(11\pi - 4\pi x)$ m, respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

a) **La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.**
b) **La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.**

Solución:

a) **La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.**

La expresión general de una onda transversal que se propaga en la dirección positiva del eje x es:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi),$$

donde:
- A es la amplitud de la onda,
- ω es la frecuencia angular,
- k es el número de onda,
- ϕ es la fase inicial.

Dado el enunciado del problema, en $t = 0\,\mathrm{s}$:

$$y(x,0) = 0{,}1\cos(\pi - 4\pi x) = 0{,}1\cos(-4\pi x + \pi).$$

Comparando con la expresión general:

$$A\cos(-kx + \phi) = 0{,}1\cos(-4\pi x + \pi).$$

De aquí, se identifican:

$$A = 0{,}1\,\mathrm{m}, \quad k = 4\pi\,\mathrm{rad/m}, \quad \phi = \pi.$$

En $t = 2\,\mathrm{s}$, la expresión de la onda es:

$$y(x,2) = 0{,}1\cos(11\pi - 4\pi x) = 0{,}1\cos(-4\pi x + 11\pi).$$

Comparando con la expresión general:

$$A\cos(\omega t - kx + \phi) = 0{,}1\cos(-4\pi x + 11\pi).$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$0{,}1\cos(\omega \cdot 2 - 4\pi x + \pi) = 0{,}1\cos(-4\pi x + 11\pi).$$

Para que las expresiones sean equivalentes, los argumentos de los cosenos deben ser iguales:

$$2\omega - 4\pi x + \pi = -4\pi x + 11\pi \quad \Rightarrow \quad 2\omega = 10\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 5\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

Sin embargo, la frecuencia angular es una magnitud positiva, por lo que:

$$\omega = 5\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

Con los valores determinados:

$$y(x,t) = 0{,}1\cos(5\pi t - 4\pi x + \pi)\ \mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la frecuencia angular de la onda es $\omega = 5\pi\,\mathrm{rad/s}$ y la expresión matemática de la onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}1\cos(4\pi x - 5\pi t + \pi)\ \mathrm{m}.}$$

b) La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.

La velocidad de propagación de una onda es la relación entre la frecuencia angular y el número de onda:

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Sustituyendo los valores encontrados:

$$v = \frac{5\pi\,\text{rad/s}}{4\pi\,\text{rad/m}} = \frac{5}{4}\,\text{m/s} = 1{,}25\,\text{m/s}.$$

La aceleración de un punto de la cuerda está dada por la segunda derivada de $y(x,t)$ respecto al tiempo:

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Calculamos las derivadas:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \phi).$$

Entonces, la aceleración máxima es:

$$a_{\max} = A\omega^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$a_{\max} = 0{,}1 \cdot (5\pi)^2 = 24{,}67\,\text{m/s}^2.$$

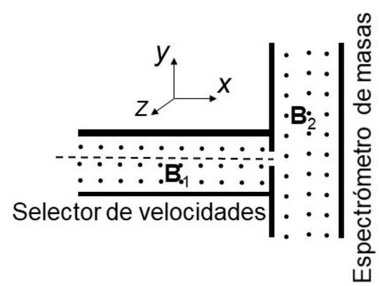
Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es $v = 1{,}25\,\text{m/s}$ y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda es $a_{\max} = 24{,}67\,\text{m/s}^2$.

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Un espectrómetro de masas es un dispositivo que mide la masa de los iones y cuyo esquema se muestra en la figura. Consta de un selector de velocidades, en el que, mediante un campo eléctrico y un campo magnético mutuamente perpendiculares, se seleccionan únicamente los iones que viajan en línea recta paralela al eje x de la figura y con un valor determinado de la velocidad. A continuación, los iones pasan a una segunda región con un campo magnético perpendicular a la velocidad de los iones, de forma que éstos realizan una trayectoria circular. En el experimento se usan iones positivos de oxígeno $^{18}O^{+}$ cuya masa es $2,7\cdot 10^{-26}$ kg y su carga es $+e$. En el selector de velocidades los campos eléctrico y magnético son $\vec{E} = 4,0\cdot 10^{5}\,\vec{j}$ V m^{-1} y $\vec{B_1} = 2\,\vec{k}$ T. El campo magnético en la segunda región del espectrómetro de masas es $\vec{B_2} = 5\,\vec{k}$ T. Calcule:

a) **La velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje x en el selector de velocidades.**
b) **El radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas donde el campo magnético es B_2.**

Dato: Valor absoluto de la carga de electrón, $e = 1,6\cdot 10^{-19}$ C.



Solución:

a) **La velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje x en el selector de velocidades.**

En el selector de velocidades, los campos eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}_1$ están mutuamente perpendiculares. Para que los iones viajen en línea recta, la fuerza eléctrica debe cancelar a la fuerza magnética:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = \vec{0},$$

donde

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}_1.$$

Considerando las direcciones de los campos:
- $\vec{E} = 4{,}0\cdot 10^{5}\,\vec{j}$ V/m (en dirección positiva del eje y),
- $\vec{B}_1 = 2\,\vec{k}$ T (en dirección positiva del eje z).

La velocidad $\vec{v}$ de los iones que viajan en línea recta debe ser paralela al eje x, es decir, $\vec{v} = v_x\vec{i}$. Entonces, el producto cruzado $\vec{v}\times\vec{B}_1$ es:

$$\vec{v}\times\vec{B}_1 = v_x\vec{i}\times B_1\vec{k} = v_xB_1(\vec{i}\times\vec{k}) = v_xB_1(-\vec{j}).$$

La condición para que los iones viajen en línea recta es:

$$q\vec{E} + q(\vec{v}\times\vec{B}_1) = \vec{0} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}_1 = \vec{0}.$$

Sustituyendo:

$$4{,}0\cdot 10^{5}\,\vec{j} - v_x\cdot 2\,\vec{j} = \vec{0}.$$

Igualando las componentes:

$$4{,}0 \cdot 10^5 - 2v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2v_x = 4{,}0 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{4{,}0 \cdot 10^5}{2} = 2{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de los iones de oxígeno que viajan en línea recta a lo largo del eje x en el selector de velocidades es $v_x = 2{,}0 \cdot 10^5$ m/s.

b) **El radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas donde el campo magnético es B_2.**

En la segunda región, solo actúa el campo magnético $\vec{B}_2 = 5\,\vec{k}\,\mathrm{T}$. Los iones en esta región realizan una trayectoria circular debido a la fuerza magnética:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}_2.$$

Para una órbita circular, la fuerza centrípeta es igual a la magnitud de la fuerza magnética:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB_2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB_2}.$$

Se tienen los siguientes valores:
- Masa del ion de oxígeno $^{18}\mathrm{O}^{+}$: $m = 2{,}7 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$,
- Velocidad $v = 2{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ (del apartado anterior),
- Carga del ion $q = +e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$,
- Campo magnético $\vec{B}_2 = 5\,\vec{k}\,\mathrm{T}$.

Sustituyendo en la fórmula del radio:

$$r = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 5\,\mathrm{T}} = 0{,}67\,\mathrm{cm}.$$

Por lo tanto, el radio de la órbita circular descrita por los iones en la segunda región del espectrómetro de masas es $r = 0{,}67$ cm.

Pregunta 4. Opción B. Ondas

Sean dos medios A y B de índices de refracción n_A y n_B, respectivamente. Un rayo de luz de frecuencia $6,04 \cdot 10^{14}$ Hz incide desde el medio A hacia el medio B, verificándose que el ángulo límite para la reflexión total es $45,58°$. Sabiendo que $n_A - n_B = 0,6$, determine:

a) **Los índices de refracción n_A y n_B de ambos medios.**
b) **Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.**

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución:

a) **Los índices de refracción n_A y n_B de ambos medios.**

El ángulo límite θ_c para la reflexión total ocurre cuando el ángulo de refracción θ_r es 90°. Según la Ley de Snell:

$$n_A \sin(\theta_c) = n_B \sin(\theta_r).$$

Dado que $\theta_r = 90°$, $\sin(90°) = 1$, por lo que:

$$n_A \sin(\theta_c) = n_B.$$

Sabemos que el ángulo límite es $\theta_c = 45{,}58°$ y que $n_A - n_B = 0{,}6$. Entonces:

$$\begin{cases} n_A \sin(45{,}58°) = n_B, \\ n_A - n_B = 0{,}6. \end{cases}$$

Ahora, sustituimos n_B en la segunda ecuación:

$$n_A - \sin(45{,}58°) \cdot n_A = 0{,}6 \;\Rightarrow\; n_A(1 - \sin(45{,}58°)) = 0{,}6 \;\Rightarrow\; n_A = \frac{0{,}6}{1 - \sin(45{,}58°)} = 2{,}10.$$

Finalmente, calculamos n_B:

$$n_B = \sin(45{,}58°) \cdot 2{,}10 = 1{,}5.$$

Por lo tanto, los índices de refracción son $n_A = 2{,}10$ y $n_B = 1{,}45$.

b) **Las longitudes de onda del rayo de luz incidente en los medios A y B.**

La velocidad de la luz en un medio está relacionada con su frecuencia y longitud de onda mediante:

$$v_i = f\lambda_i,$$

donde:
- v_i es la velocidad de la luz en el medio i,
- f es la frecuencia de la onda (constante para todos los medios),
- λ_i es la longitud de onda en el medio i.

Además, la velocidad de la luz en un medio está relacionada con la velocidad de la luz en el vacío y el índice de refracción:

$$v_i = \frac{c}{n_i}.$$

Calculamos las velocidades en los medios A y B:

$$v_A = \frac{c}{n_A} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2{,}05} = 1{,}463 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$v_B = \frac{c}{n_B} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}45} = 2{,}069 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Sabemos que la frecuencia $f = 6{,}04 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$, entonces:

$$\lambda_A = \frac{v_A}{f} = \frac{1{,}463 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{6{,}04 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 2{,}42 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 242\,\text{nm},$$

$$\lambda_B = \frac{v_B}{f} = \frac{2{,}069 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{6{,}04 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 3{,}42 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 342\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, las longitudes de onda son $\boldsymbol{\lambda_A = 242\,\text{nm}}$ y $\boldsymbol{\lambda_B = 342\,\text{nm}}$.

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

El patrón del kilogramo es un cilindro hecho con una aleación de platino-iridio (90 % en masa de Pt) que se encuentra en un museo de París. El platino está formado por diversos isótopos, uno de ellos, el ^{190}Pt, es radiactivo siendo su tiempo de semidesintegración de $6,5 \cdot 10^{11}$ años. El porcentaje del isótopo ^{190}Pt en una muestra de platino es del $0,012\%$ en masa.

a) **Calcule la actividad inicial del patrón del kilogramo.**
b) **¿Cuál será la masa final del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años?**

Datos: Masa atómica del isótopo ^{190}Pt; $M = 189,96\,\text{u}$; Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$.

Solución:

a) **Calcule la actividad inicial del patrón del kilogramo.**

La actividad inicial (A) de una muestra radiactiva está dada por:

$$A = \lambda N,$$

donde:
- λ es la constante de desintegración,
- N es el número de átomos del isótopo radiactivo.

La relación entre el tiempo de semidesintegración ($T_{1/2}$) y la constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Dado que

$$T_{1/2} = 6{,}5 \cdot 10^{11}\text{ años},$$

convertimos $T_{1/2}$ a segundos:

$$T_{1/2} = 6{,}5 \cdot 10^{11}\text{ años} \cdot 365{,}25\,\text{días/año} \cdot 24\,\text{horas/día} \cdot 3600\,\text{segundos/hora} = 2{,}05 \cdot 10^{19}\text{ s}.$$

Entonces,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{2{,}05 \cdot 10^{19}\text{ s}} = 3{,}38 \cdot 10^{-20}\text{ s}^{-1}.$$

Dado que en el patrón del kilogramo hay 0,9 kg de Pt y el porcentaje del isótopo ^{190}Pt es del 0,012% en masa, la masa de ^{190}Pt es:

$$m_{^{190}\text{Pt}} = 0{,}9\,\text{kg} \cdot 0{,}012 \cdot 10^{-2} = 0{,}9 \cdot 0{,}00012\,\text{kg} = 1{,}08 \cdot 10^{-4}\text{ kg}.$$

Ahora, calculamos el número de moles (n) y luego el número de átomos (N):

$$n = \frac{m_{^{190}\text{Pt}}}{M} = \frac{1{,}08 \cdot 10^{-4}\text{ kg}}{189{,}96 \cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}} = 5{,}69 \cdot 10^{-4}\text{ mol},$$

$$N = n \cdot N_A = 5{,}69 \cdot 10^{-4}\text{ mol} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\text{ átomos/mol} = 3{,}42 \cdot 10^{20}\text{ átomos}.$$

Así, la actividad incial es:

$$A = \lambda N = 3{,}38 \cdot 10^{-20}\text{ s}^{-1} \cdot 3{,}42 \cdot 10^{20}\text{ átomos} = 11{,}57\,\text{Bq}.$$

Por lo tanto, la actividad inicial del patrón del kilogramo es aproximadamente 11,57 Bq.

b) ¿Cuál será la masa final del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años?

Dado que:

$$t = 1{,}0 \cdot 10^9 \text{ años},$$

convertimos a segundos:

$$t = 1{,}0 \cdot 10^9 \text{ años} \cdot 365{,}25 \text{ días/año} \cdot 24 \text{ horas/día} \cdot 3600 \text{ segundos/hora} = 3{,}16 \cdot 10^{16} \text{ s}.$$

Como en el apartado a):

$$m_0 = 1{,}08 \cdot 10^{-4} \text{ kg}.$$

La masa restante después de un tiempo t está dada por:

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}.$$

Sustituyendo los valores:

$$m(t) = 1{,}08 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot e^{-3{,}38 \cdot 10^{-20} \text{ s}^{-1} \cdot 3{,}16 \cdot 10^{16} \text{ s}} = 1{,}08 \cdot 10^{-4} \text{ kg}.$$

Debido a que λt es muy pequeño ($\lambda t = 1{,}07 \cdot 10^{-3}$), la disminución en la masa es insignificante en comparación con la masa inicial.

Por lo tanto, la masa final del platino ^{190}Pt que queda en el patrón del kilogramo transcurridos mil millones de años es aproximadamente $\mathbf{1{,}08 \cdot 10^{-4}}$ kg.